Physik am Sonnabend 2003

Die Physik der Töne

Vom Geigenton
zum letzten Schrei der Elementarteilchen-Theorie

Helmut Eschrig

Ernst Eichner (1740–1777)

Duett für Violine und Viola op. 10, Nr. 1, 1. Satz

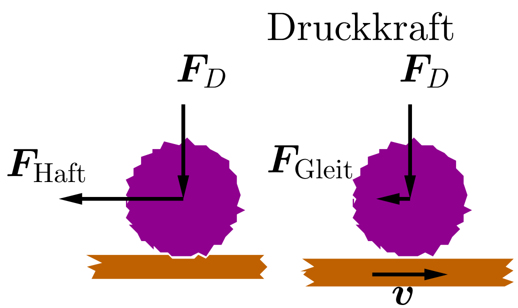
Ausführende:

Dr. Manfred Weihnacht, Violine

Jürgen Brömsel, Viola

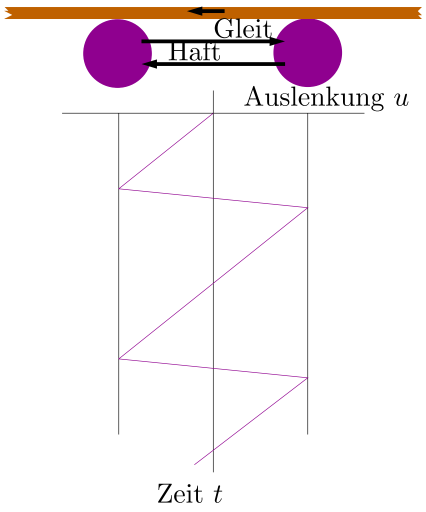
Die gestrichene Violinsaite

Haft- und Gleitreibung:

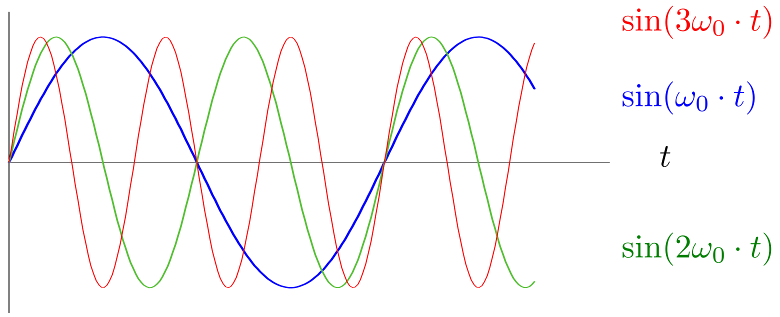


$\boldsymbol{F}_{\text{Gleit}} < \boldsymbol{F}_{\text{Haft}}$

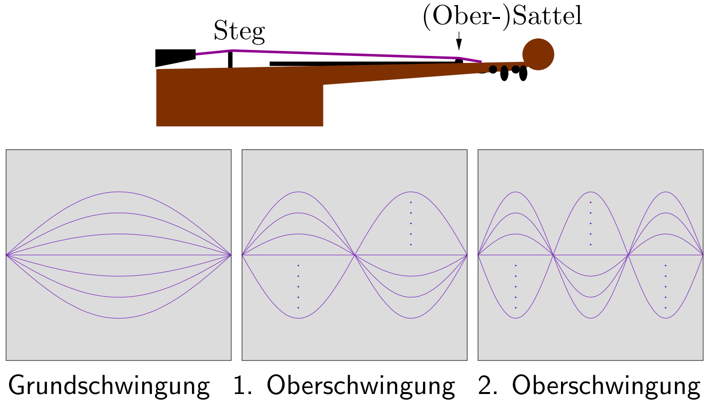
Die Auslenkung der Violinsaite unter dem Bogen:



Die Eigenschwingungen der Violinsaite im Zeitablauf:



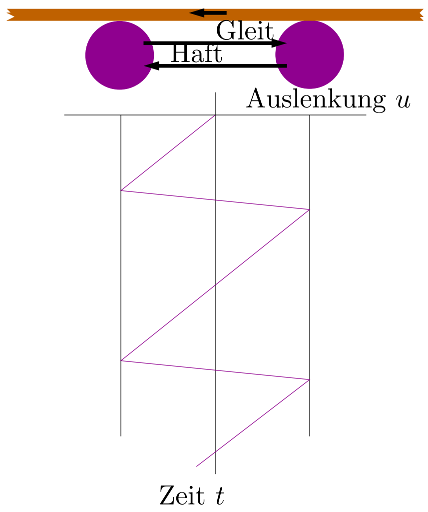
Die Eigenschwingungen der Violinsaite:

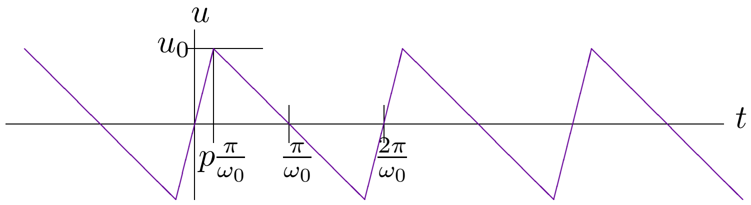


Kreisfrequenz:

ω_0 $2\omega_0$ $3\omega_0$

Die Auslenkung der Violinsaite unter dem Bogen:





$$u = u_0 \cdot f_p\left(\frac{\omega_0 t}{\pi}\right)$$

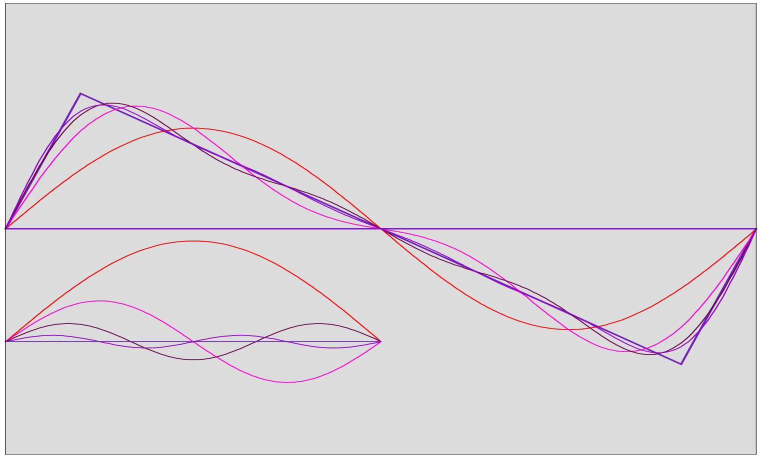
$$f_p(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau}{p} & \text{für } 2k+p<\tau<2k+2+p, \\ \frac{1-\tau}{1-p} & \text{für } 2k-p<\tau<2k+p \end{cases} = \sum_n a_n(p)\sin(n\pi\tau)$$

$$a_n(p) = \frac{2}{\pi^2 n^2}\,\frac{1}{p(1-p)}\,\sin(n\pi p).$$

Hermann von Helmholtz, 1821–1894 Joseph Joachim, 1831–1907

Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik, 1863.

Fourier-Zerlegung von $f_p(\tau)$:



Allgemeiner Schwingungszustand der Violinsaite als Überlagerung der Eigenmoden:

$$u(x,t) = \sum_n u_n \sin(n\pi x/L)\sin(n\omega_0 t + \alpha_n)$$

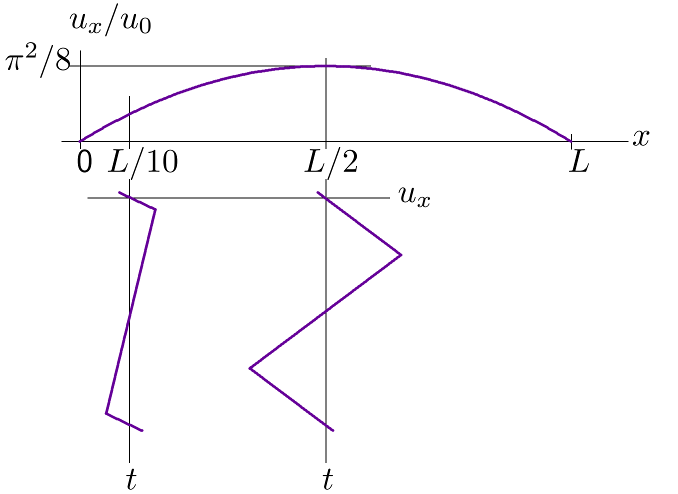
Für $u_n = u_0/n^2$, $\alpha_n = 0$:

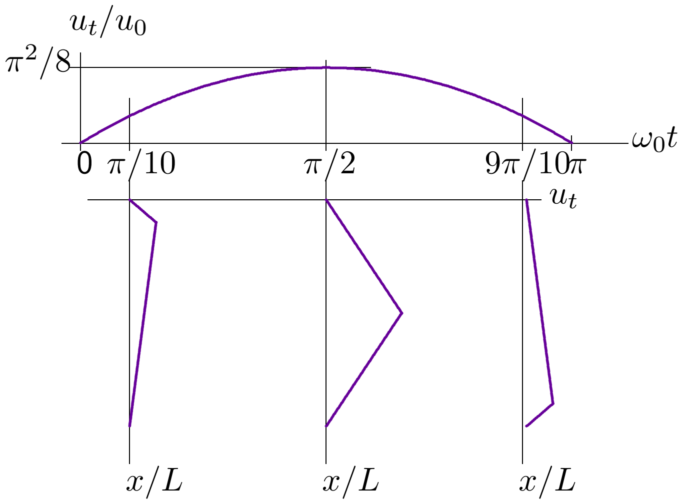
$$u(x,t) = u_0 \sum_n \frac{1}{n^2}\sin(n\pi x/L)\sin(n\omega_0 t) =$$

$$= u_x f_{x/L}(\omega_0 t/\pi), \quad u_x = u_0\frac{\pi^2}{2}\frac{x(L-x)}{L^2}$$

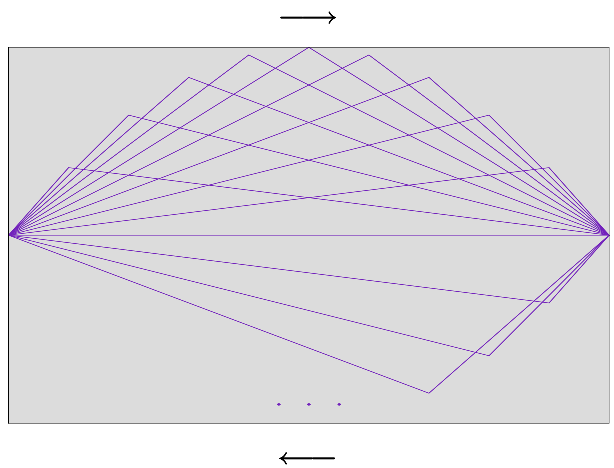
$$= u_t f_{\omega_0 t/\pi}(x/L), \quad u_t = \frac{u_0}{2}\omega_0 t(\pi - \omega_0 t), \quad \omega_0 t < \pi$$

$$u_t = -u_{t+\pi} = u_{t+2\pi}$$





Die Bewegung der gestrichenen Violinsaite im Zeitablauf:



Der Klang der Töne

Der Klang ergibt sich aus dem Frequenzspektrum des Tones, d.h. aus den enthaltenen Frequenzen und ihren Amplitudenverhältnissen.

Die Schwingungen der Violinsaite regen den Geigenkörper zu Schwingungen an. Dieser hat seine eigenen Eigenschwingungsfrequenzen, die die Obertöne der Saiten verstärken und den Klang voller machen.

Ein guter Geigenkörper hat gleichmäßig verteilte Eigenfrequenzen von ca. 3000 Hz bis ca. 6000 Hz; an einer erstklassigen Stradivari wurden sehr gleichmäßig verteilte Eigenfrequenzen zwischen 3200 Hz und 5200 Hz gemessen. Bei einer Durchschnittsgeige liegen diese bis zu 1000 Hz tiefer und sind ungleichmäßig verteilt.

Der Geigenkörper überträgt die Schwingungen an die Luft und diese an unser Ohr. Jedes Übertragungsglied verändert das Spektrum: ändert die Amplitudenverhältnisse und fügt durch nichtlineare Effekte Summen- und Differenzfrequenzen hinzu.

$$\sin(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t) = \frac{1}{2}\Big(-\cos(\omega_1+\omega_2)t + \cos(\omega_1-\omega_2)t\Big)$$

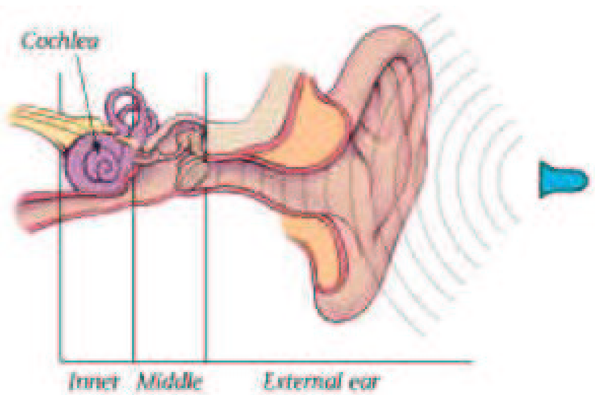


Figure 1: Die Schallwellen des Tones treffen auf das Ohr.

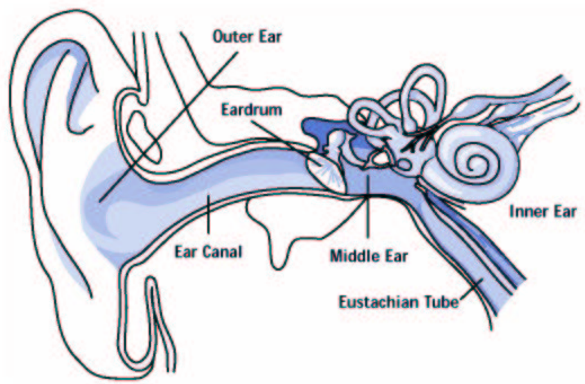


Figure 2: Das Ohr.

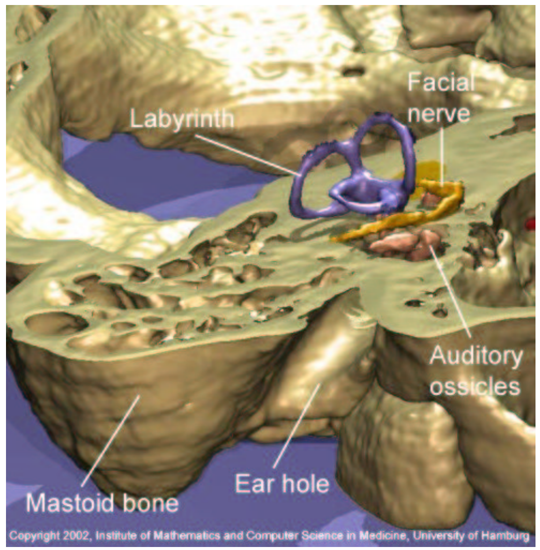


Figure 3: Das innere Ohr mit Labyrinth und Gehörknöcheln.

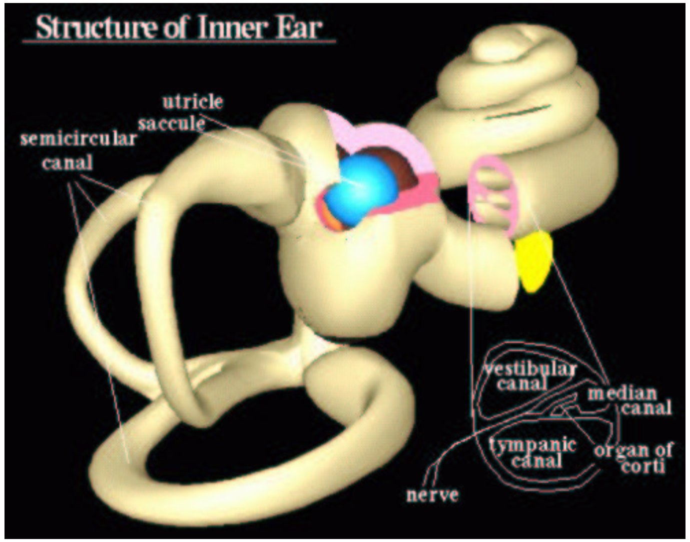


Figure 4: Das innere Ohr schematisch.

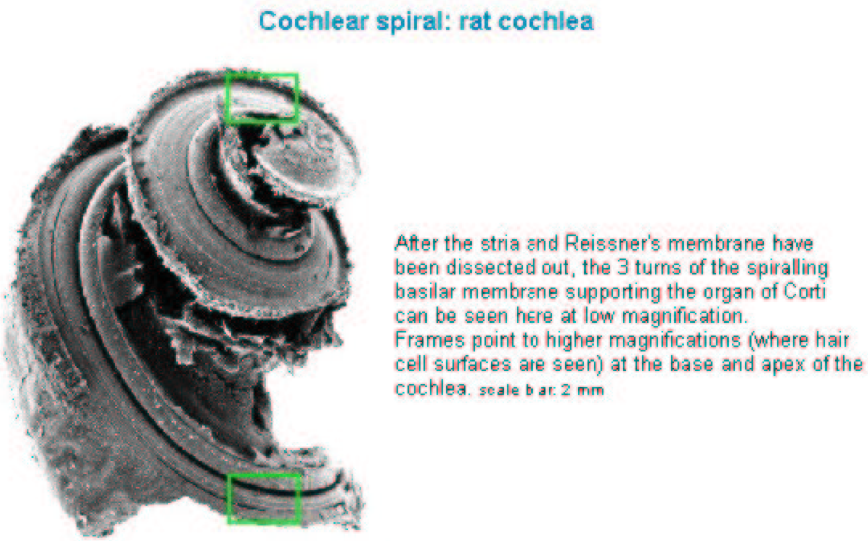


Figure 5: Das Innere der Schnecke.

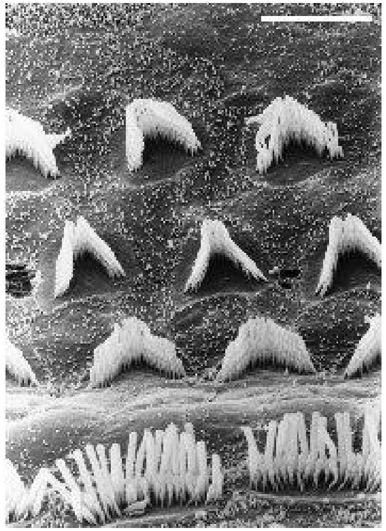
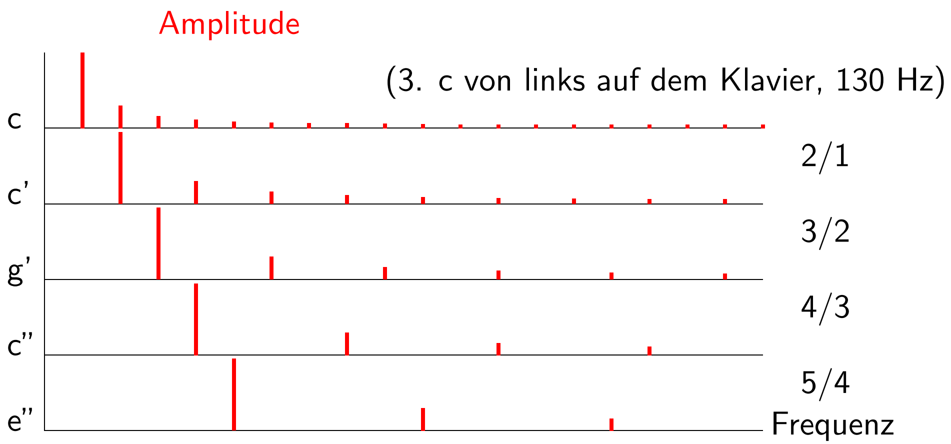


Figure 6: Die Haarbüschel.

Figure 7: Die Entstehung der Musikempfindung ist unbekannt.

Die Konsonanz der Streichertöne



Grundschwingungsverhältnisse der Intervalle reiner Stimmung:

	Intervall			Intervall			Intervall		Konsonanz
2/1	Oktave	c–c'							absolut kons.
3/2	Quinte	c–g							
4/3	Quarte	c–f	5/3	große Sexte	c–a				⇓
5/4	große Terz	c–e	6/4	Quinte		7/4	*		
6/5	kleine Terz	a–c'	7/5	überm. Quarte	c–fis	8/5	kleine Sexte	e–c'	...
					...				
9/8	große Sekunde	c–d		...		15/8	große Septime	c–h	zunehmend
	...					16/9	kleine Septime	d–c'	dissonant

Grundschwingungsverhältnisse der C-Dur Tonleiter in reiner Stimmung:

Note	c	d	e	f	g	a	h	c'
Verhältnis zur Tonika	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2
zum vorherigen Ton		9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15

Geht man vom c' nach unten, so erhält man zu den großen die kleinen Intervalle.

Stellt man 7 Oktaven übereinander, ist das Grundschwingungsverhältnis

$$(2/1)^7 = 128$$

Für 12 übereinander gestellte Quinten ist es

$$(3/2)^{12} = 129.746\ldots$$

Der Quotient,

$$(3/2)^{12}/2^7 = 3^{12}/2^{19} = 1.0136\ldots \approx (1/4) \text{ einer kleinen Sekunde,}$$

ist das pythagoreische Komma, das zusammen mit den obigen reinen Intervallunterschieden das Spannungsfeld der Harmonielehre bildet.

Eine Verbesserung tritt erst ein, wenn man 31 Oktaven und 53 Quinten übereinander stellt: $(3/2)^{53}/2^{31} = 1.002$.

Das Schwingungsquant

Max Planck (1858–1947), der auch ein sehr guter Pianist und Organist war und sogar eine Oper geschrieben hat, untersuchte um 1900 das Spektrum des Lichts und fand heraus, dass schwingende Körper die Schwingungsenergie nur in festen Portionen abgeben können, die nur von der Frequenz abhängen (Nobelpreis 1918):

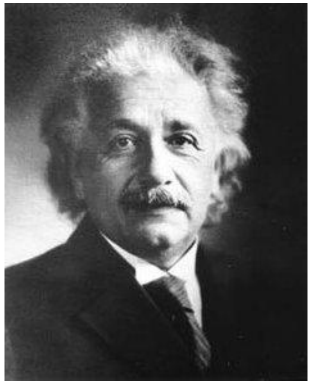
$$E = h\nu = \frac{h\omega}{2\pi}$$

$$h = 6.62607555(40) \cdot 10^{-34} \text{ kgm}^2/\text{s}$$

Einstein wies 1905 nach, dass der photoelektrische Effekt nur erklärt werden kann, wenn auch das Licht selbst diese "Energiekörnung" hat. (Für diese Entdeckung des Lichtquants—des Photons—und nicht für seine größte Leistung, die erst nach vielen Jahren unumstritten anerkannte Relativitätstheorie erhielt Einstein 1921 den Nobelpreis.)

Heute wissen wir, dass alle Schwingungen derart quantisiert sind: Die Schallquanten sind die Phononen. Sie sind aber so winzig, d.h. in jedem Musikton sind sie in so ungeheurer Zahl vorhanden, dass die Quantisierung für die Musikübertragung keine Rolle spielt (wohl aber in den molekularen Vorgängen, die das Tonsignal in der Nervenzelle von der Cochlea ins Gehirn übertragen).

Die Äquivalenz von Energie und Masse



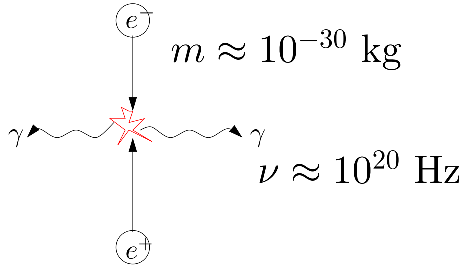
Albert Einstein (1879–1955), der auch leidlich Geige spielte, analysierte 1905 das Michelsonsche Experiment zur Lichtausbreitungsgeschwindigkeit und kam auf diese Weise zur speziellen Relativitätstheorie. Sie impliziert, dass Energie und Masse wesensgleich sind und gemäß

$$E = mc^2, \quad c = 299792458 \text{ m/s}$$

ineinander umgerechent werden können. Mit der Planckschen Formel ergibt sich

$$mc^2 = h\nu$$

Beispiel: Umwandlung eines Elektron-Positron-Paares der Ruhmasse $2m$ in zwei Photonen (γ-Strahlen) der Frequenz ν:



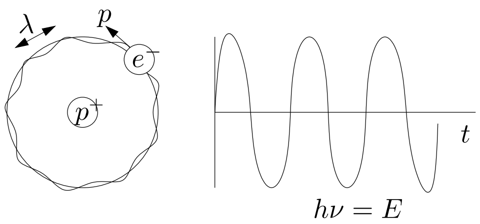
Teilchen als Welle

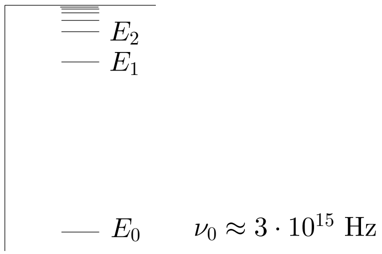
Louis de Broglie (1892–1987) stellte 1924 die Hypothese auf, dass die für das Licht gefundene Teilchen-Welle-Dualität für alle Teilchen gilt. Neben dem Planckschen Zusammenhang $E = h\nu$ zwischen Energie und Frequenz gilt der Zusammenhang

$$p = h/\lambda$$

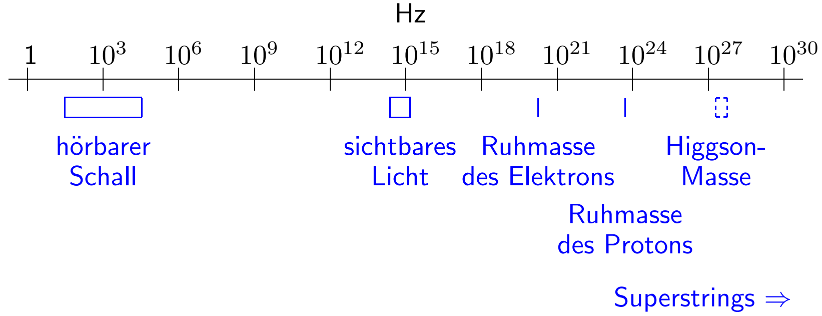
zwischen Wellenlänge λ und Impuls p. Diese Hypothese wurde mit der Quantenmechanik bestätigt. De Broglie erhielt 1929 dafür den Nobelpreis.

Beispiel: Wasserstoff-Atom:





Die Frequenzskala der Natur



Harmonie des Universums:

Über mehr als 30 Größenordnungen trägt ein einheitliches physikalisches Konzept!

Erwin Schrödinger (1887–1961) war nach seinen Worten “von Einstein mit der Nase auf die Hypothese de Broglies gestoßen worden” und schuf 1926 auf ihrer Grundlage die Wellengleichung der Quantenmechanik. Er erhielt dafür 1933 den Nobelpreis (zusammen mit Paul Adrian Maurice Dirac (1902–1984), von dem 1928 die relativistische Wellengleichung gefunden worden war).
Die de Broglieschen Teilchen-Welle-Relationen liefern auch die von Werner Heisenberg (1901–1976) auf einem anderen unabhängigen Weg 1925 gefundene Unschärferelation (Nobelpreis 1931).

We shall not cease from exploration
And the end of all our exploring
Will be to arrive where we started
And know the place for the first time.

(T.S. Eliot, cited by T. Page with regard to the pianist Glenn Gould)

Wir werden nicht aufhören zu forschen
Und am Ende aller unserer Erkundungen
Werden wir ankommen von wo wir ausgingen
Und werden den Ort zum ersten Mal kennen.